الوحدة السابعة

المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

Linear Equations and Linear Inequalities

المنحدرات

Slopes

إهداء من

أ. هبه يحيى

منطقة الجهراء التعليمية

مع تحيا ت

مجموعة قنوات

MidNight

مشروع الوحدة : (تصميم منحدر لذوي الاحتياجات الخاصّة)

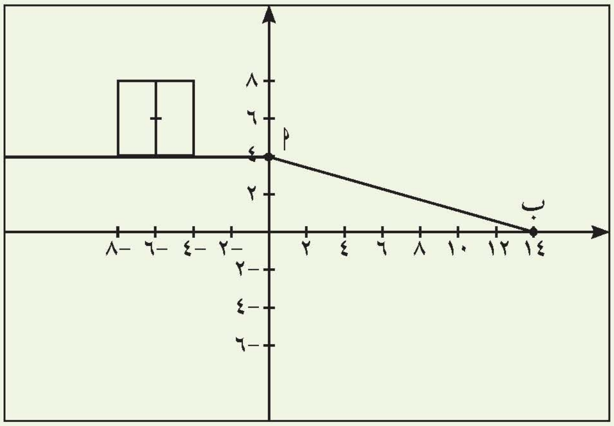
دولة الكويت تُعَدّ من الدول الرائدة في مجال خدمة ورعاية وتأهيل ذوي الاحتياجات الخاصّة .

ومن مظاهر هذه الرعاية القوانين والشروط والمواصفات الخاصّة بتسهيل حركتهم داخل وخارج كلّ المباني لجميع مناطق الكويت ، وذلك بوضع المنحدرات المناسِبة ، وتكون ذات ميل مناسِب يسهّل حركتهم داخل وخارج المباني.

خطّة العمل :

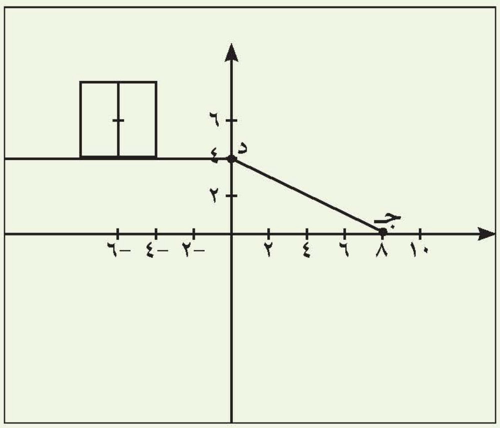
قام مهندس بتصميم منحدرين لذوي الاحتياجات الخاصّة ، يريد اختيار الأنسب إنشاؤه لإحدى الدوائر الحكومية .

ساعِد المهندس على اختيار المنحدر المناسِب .



خطوات تنفيذ المشروع :

- اِبحث في شبكة الإنترنت عن المواصفات القياسية لمنحدر ذوي الاحتياجات الخاصّة .
- أُحسب ميل المنحدر في الشبكة الأولى والذي يمثّل $\overline{\text{أ ب}}$.
- أُحسب ميل المنحدر في الشبكة الثانية والذي يمثّل $\overline{\text{د جـ}}$.
- اِختر التصميم المناسِب .



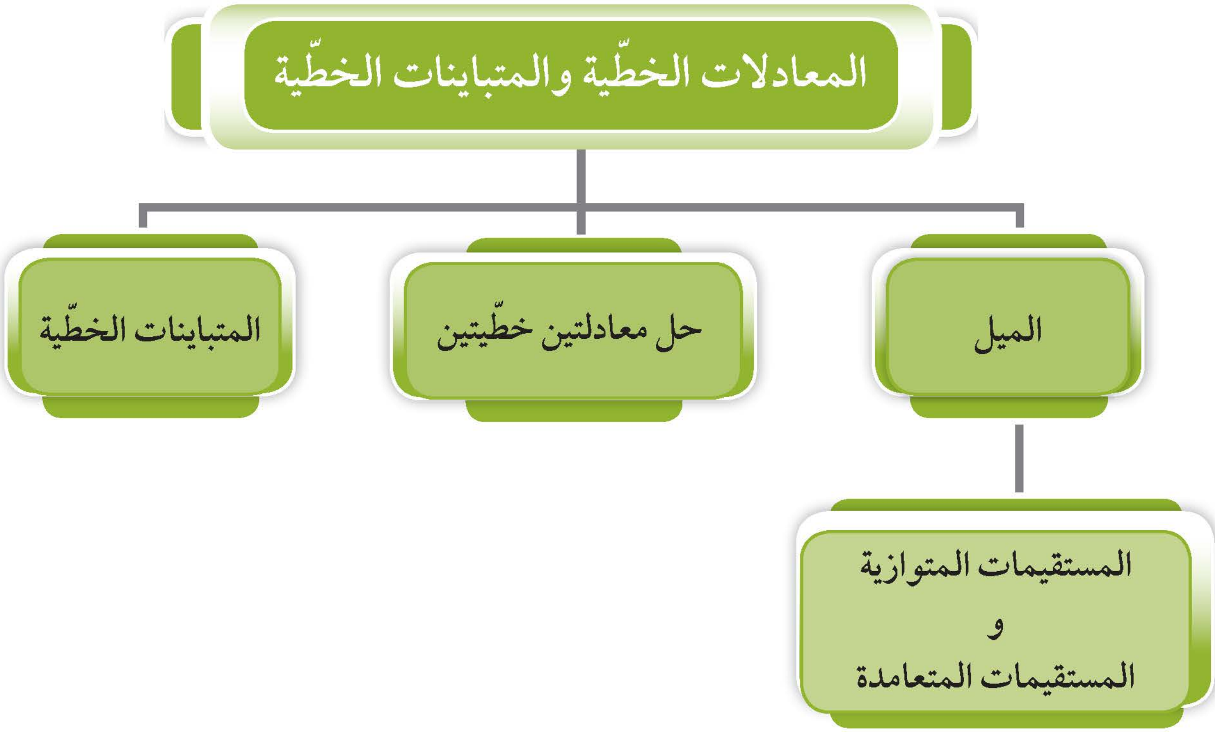
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة السابعة

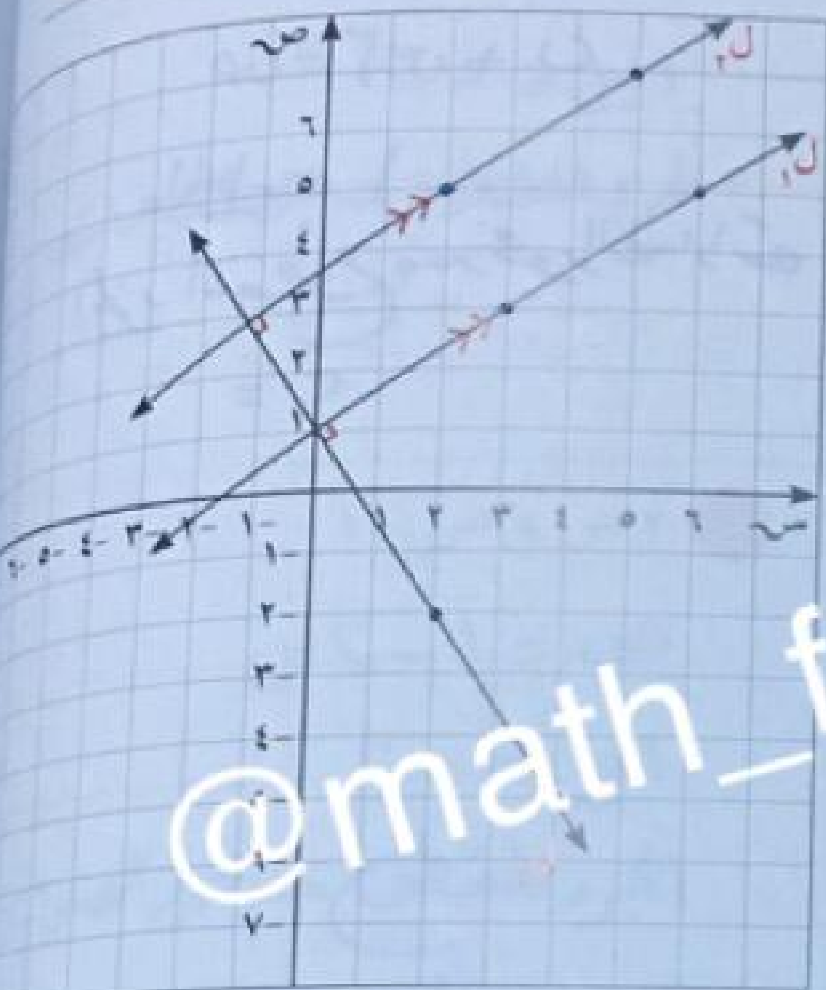


٧-٢ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة
Parallel Lines and Perpendicular Lines

سوف تتعلّم : المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة والعلاقة بين ميلها .

العبارات والمفردات :
المستقيمات المتوازية
Parallel Lines
المستقيمات المتعامدة
Perpendicular Lines

نشاط :



في الشكل المقابِل :

إذا كان $\overleftrightarrow{ل_{١}}$ // $\overleftrightarrow{ل_{٢}}$ ، $\overleftrightarrow{ل_{١}} \perp \overleftrightarrow{ل_{٣}}$ ، $\overleftrightarrow{ل_{٢}} \perp \overleftrightarrow{ل_{٣}}$.

١ أوجِد ميل المستقيمات التالية :

أ $\overleftrightarrow{ل_{١}}$

$\frac{٢}{٣}$

ب $\overleftrightarrow{ل_{٢}}$

$\frac{٢}{٣}$

جـ $\overleftrightarrow{ل_{٣}}$

$-\frac{٣}{٢}$

٢ أكمِل ما يلي :

أ $\overleftrightarrow{ل_{١}}$ // $\overleftrightarrow{ل_{٢}}$

ميل $\overleftrightarrow{ل_{١}}$ = ميل $\overleftrightarrow{ل_{٢}}$

ب $\overleftrightarrow{ل_{١}} \perp \overleftrightarrow{ل_{٣}}$

ميل $\overleftrightarrow{ل_{١}}$ × ميل $\overleftrightarrow{ل_{٣}}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{-٣}{٢} = -١$

جـ $\overleftrightarrow{ل_{٢}} \perp \overleftrightarrow{ل_{٣}}$

ميل $\overleftrightarrow{ل_{٢}}$ × ميل $\overleftrightarrow{ل_{٣}}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{-٣}{٢} = -١$

ليكن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $م_٢$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_٢}$:

- $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢} \Leftrightarrow م_١ = م_٢$
- $\overleftrightarrow{ل_١} \perp \overleftrightarrow{ل_٢} \Leftrightarrow م_١ \times م_٢ = -١$ (أي أن : $م_١ = \frac{-١}{م_٢}$)

مثال (١) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ن}$ يمرّ بالنقطتين أ(−٣ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣) ،
وكانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٢ س + ٧ ، فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{ن} \parallel \overleftrightarrow{ك}$.

الحلّ :

∵ $\overleftrightarrow{ن}$ يمر بالنقطتين أ(−٣ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣)

∴ ميل $\overleftrightarrow{ن} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{٣ - ٥}{-٤ - (-٣)} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

∵ معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٢ س + ٧

∴ ميل $\overleftrightarrow{ك} = ٢$

∵ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = ميل $\overleftrightarrow{ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ن} \parallel \overleftrightarrow{ك}$

تدرّب (١) :

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو −٣ ، حدِّد أيًا من المستقيمين التاليين يوازي $\overleftrightarrow{أب}$:

أ) $\overleftrightarrow{جـ د}$ الذي يمرّ بالنقطتين :

جـ(٣ ، −١) ، د (١ ، −٧)

ميل $\overleftrightarrow{هـ د} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{-٧ - -١}{١ - ٣} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$

لا يوازي $\overleftrightarrow{أب}$ لأن ميل $\overleftrightarrow{أب} \neq$ ميل $\overleftrightarrow{هـ د}$

ب) $\overleftrightarrow{ل ع}$ الذي معادلته :

٣ س + ص = ٥

نضع المعادلة على الصورة ص = م س + ن

ص = ٥ − ٣ س

ميل $\overleftrightarrow{ل ع} = -٣$

$\overleftrightarrow{ل ع} \parallel \overleftrightarrow{أب}$ لأن ميل $\overleftrightarrow{ل ع}$ = ميل $\overleftrightarrow{أب}$

مثال (٢) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ يمرّ بالنقطتين ف (٤ ، ٦) ، ع (٦ ، ١)

وكانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٤ ، أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{ل} \perp \overleftrightarrow{ك}$.

الحل :

∵ $\overleftrightarrow{ل}$ يمرّ بالنقطتين ف (٤ ، ٦) ، ع (٦ ، ١)

∴ ميل $\overleftrightarrow{ل}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{١ - ٦}{٦ - ٤}$

= $\frac{-٥}{٢}$

∵ معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٤

∴ ميل $\overleftrightarrow{ك}$ = $\frac{٢}{٥}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{ل}$ × ميل $\overleftrightarrow{ك}$

= $\frac{-٥}{٢}$ × $\frac{٢}{٥}$ = −١

∴ $\overleftrightarrow{ل} \perp \overleftrightarrow{ك}$

تدرّب (٢) :

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{م ن}$ هو $\frac{١}{٤}$ ، حدِّد أيًّا من المستقيمين التاليين عمودي على $\overleftrightarrow{م ن}$.

أ $\overleftrightarrow{ع م}$ الذي معادلته :

٢ ص − ٨ س − ٣ = ٠

نضع المعادلة في صورة ص = م س + ن

$\frac{٢}{٢}$ ص = $\frac{٨}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

ص = ٤ س + $\frac{٣}{٢}$

ميل $\overleftrightarrow{ع م}$ = ٤

ميل $\overleftrightarrow{م ن}$ × ميل $\overleftrightarrow{ع م}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٤ = ١

∴ $\overleftrightarrow{ع م}$ غير عمودي على $\overleftrightarrow{م ن}$

ب $\overleftrightarrow{أ ب}$ الذي يمرّ بالنقطتين :

أ (٦ ، ٩) ، ب (٧ ، ٥)

ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٥ - ٩}{٧ - ٦}$ = $\frac{-٤}{١}$ = −٤

ميل $\overleftrightarrow{م ن}$ × ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$

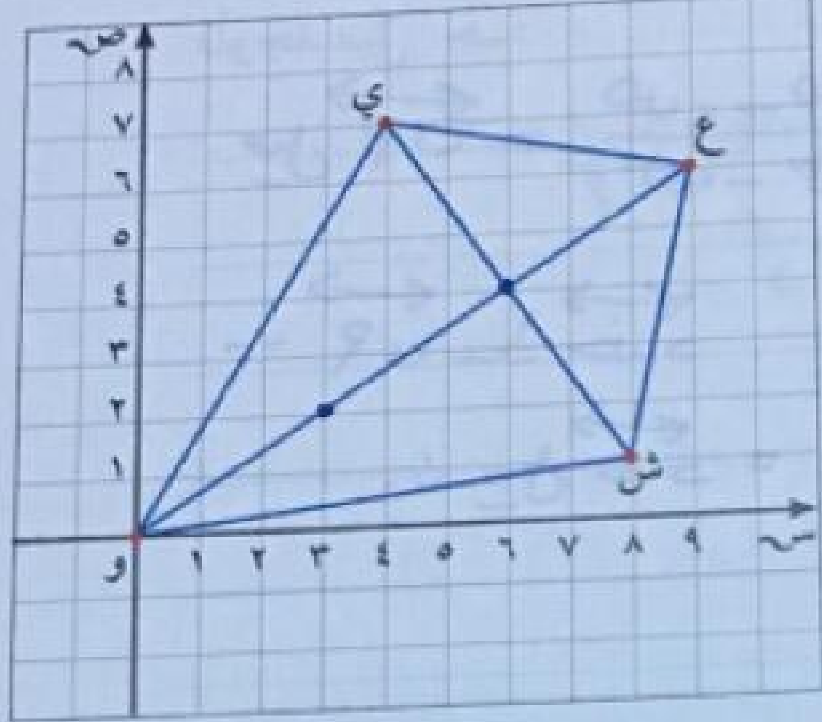
= $\frac{١}{٤}$ × −٤ = −١

∴ $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{م ن}$

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل : ع ش و ي شكل رباعي ، أثبِت أنّ قطريه متعامدان .

ميل $\overline{ع و}$ = $\frac{٢}{٣}$



ميل $\overline{ى ش}$ = $-\frac{٣}{٢}$

ميل $\overline{ع و}$ × ميل $\overline{ى ش}$ = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢}$ = ‎-١

∴ $\overline{ع و} \perp \overline{ى ش}$

∴ قطرا الشكل الرباعى ع ش و ى متعامدان

مثال (٣) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ، ومعادلة $\overleftrightarrow{ل}$: ص = ٢ س + ١

أوجد ميل $\overleftrightarrow{ن}$.

الحلّ :

∵ معادلة $\overleftrightarrow{ل}$: ص = ٢ س + ١

∴ ميل $\overleftrightarrow{ل}$ = ٢

∵ $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = $\frac{-١}{\text{ميل } \overleftrightarrow{ل}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = $\frac{-١}{٢}$

فكِّر وناقِش

هل المستقيم الذي معادلته ص = ٥ يوازي المستقيم المارّ بالنقطتين (-٣ ، ٢) ، (١ ، ٢) ؟ ولماذا ؟

تدرَّب (٤) :

إذا كان $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ يمرّ بالنقطتين أ(٥ ، ٣) ، ب(٨ ، ٦) .

فأوجِد ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$.

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٣}{٨ - ٥} = \frac{٣}{٣} = ١$$

$\because \overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ $\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{-١}{\text{ميل } \overleftrightarrow{جـ د}}$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{جـ د} = -١$

تمــرَّنْ :

١ أكمِل ما يلي :

ميل $\overleftrightarrow{ل}$	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٢	٢	$-\frac{١}{٢}$
$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$\frac{٣}{٢}$
$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	٤-
$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$-\frac{٥}{٢}$

٢ إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو ٤- ، فأيّ من المستقيمات التالية يوازي $\overleftrightarrow{أب}$:

أ $\overleftrightarrow{جـ د}$ الذي يمرّ بالنقطتين :

جـ(٠ ، ٦) ، د(٤- ، ٢)

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{جـ د} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٢ - ٦}{-٤ - ٠} = \frac{-٤}{-٤} = ١$$

ميل $\overleftrightarrow{جـ د} \neq$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{جـ د}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{أب}$

ب $\overleftrightarrow{ع ل}$ الذي معادلته :

ص + ٤ س − ٥ = ٠

نضع المعادلة في صورة ص = م س + ب

ص = −٤ س + ٥

ميل $\overleftrightarrow{ع ل} = -٤$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ع ل}$

$\therefore \overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{ع ل}$

(٣) إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = ٤ س + ٣

ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ن}}$: ٤ ص − ١٦ س = ١ ، فهل المستقيمان متوازيان ؟ وضّح ذلك .

ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = ٤

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ن}}$:

$\frac{\text{٤}}{\text{٤}}$ ص = $\frac{\text{١٦}}{\text{٤}}$ س + $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

ص = ٤ س + $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}}$ = ٤

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ن}}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ك}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ن}}$

(٤) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ}}$ يمرّ بالنقطتين (٨ ، ١) ، (٣ ، ٤)

ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب}}$: ١٠ س − ٦ ص = −٥ ، فهل المستقيمان متعامدان ؟ وضّح ذلك .

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ}}$ = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ = $\frac{\text{٤} - \text{١}}{\text{٣} - \text{٨}}$ = $\frac{\text{٣}}{-\text{٥}}$ = $\frac{-\text{٣}}{\text{٥}}$

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب}}$: −٦ ص = −٥ − ١٠ س

$\frac{\text{٦}}{\text{٦}}$ ص = $\frac{\text{١٠}}{\text{٦}}$ س + $\frac{\text{٥}}{\text{٦}}$

ص = $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ س + $\frac{\text{٥}}{\text{٦}}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ب}}$ = $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{ب}}$ = $\frac{-\text{٣}}{\text{٥}}$ × $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ = −١

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب}}$

٥ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ يمرّ بالنقطتين م(٢، ٦)، ن(٧، ٦)،

$\overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$ يمرّ بالنقطتين هـ(٢، ١)، ط(٥، ١).

أثبِت أنّ: $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$.

$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{م ن}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٦ - ٦}{٧ - ٢} = \frac{٠}{٥} = ٠$

$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{هـ ط}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{١ - ١}{٥ - ٢} = \frac{٠}{٣} = ٠$

$\because \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{م ن}} = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$

$\therefore \overleftrightarrow{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ ط}}$

٦ تحقَّقْ من تعامد $\overleftrightarrow{\text{ل}_١}$ الذي يمرّ بالنقطتين (٣، −٦)، (٧، ٦)

مع $\overleftrightarrow{\text{ل}_٢}$ الذي يمرّ بالنقطتين (٣، ٤)، (−٦، ٧).

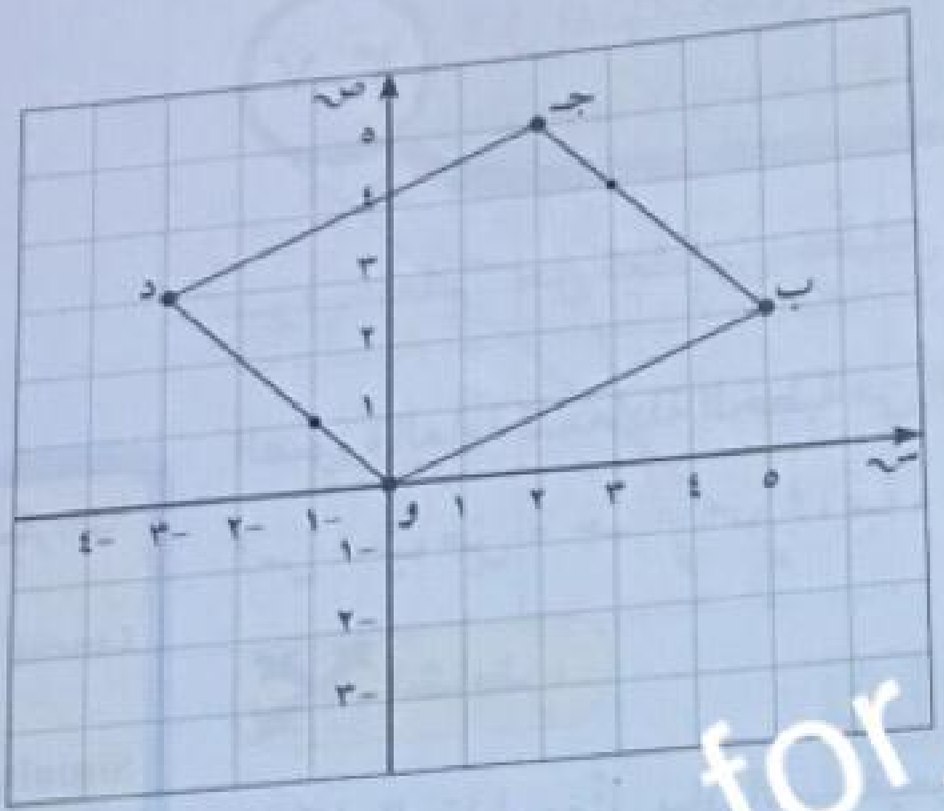
$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ل}_١} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٦ - {}^{-}٦}{٧ - ٣} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ل}_٢} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٧ - ٤}{{}^{-}٦ - ٣} = \frac{٣}{{}^{-}٩} = \frac{{}^{-}١}{٣}$

$\because \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ل}_١} \times \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ل}_٢} = ٣ \times \frac{{}^{-}١}{٣} = {}^{-}١$

$\therefore \overleftrightarrow{\text{ل}_١} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}_٢}$

٧ في الشكل الرباعي و ب جـ د ، أثبِت أنّ : $\overline{\text{و ب}} \parallel \overline{\text{د جـ}}$.



ميل $\overline{\text{وب}} = \frac{٢}{٥}$

ميل $\overline{\text{دجـ}} = \frac{٢}{٥}$

∵ ميل $\overline{\text{وب}}$ = ميل $\overline{\text{دجـ}}$

∴ $\overline{\text{وب}} \parallel \overline{\text{دجـ}}$

٨ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ك}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ حيث معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ٨ س − ٢ ص = ٩ ،
أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$.

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$:

−٢ص = ٩ − ٨س

$\frac{٢ص}{٢} = \frac{٨}{٢}س - \frac{٩}{٢}$

ص = ٤س − $\frac{٩}{٢}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = ٤

∵ $\overleftrightarrow{\text{ك}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}} = \frac{-١}{\text{ميل ك}} = \frac{-١}{٤}$